Проблемы физики, математики и техники, № 2 (27), 2016

МАТЕМАТИКА

УДК 511.542

КОНЕЧНЫЕ ОБОБЩЕННО *С*-СВЕРХРАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ И ИХ ВЗАИМНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Е.Н. Мысловец, А.Ф. Васильев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

FINITE GENERALIZED *C*-SUPERSOLUBLE GROUPS AND THEIR MUTUALLY PERMUTABLE PRODUCTS

E.N. Myslovets, A.F. Vasil'ev

F. Scorina Gomel State University

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Конечная группа G называется ca-$\mathfrak{F}$-группой, если каждый ее неабелевый главный фактор является простой группой и $H/K \rtimes C_G(H/K) \in \mathfrak{F}$ для каждого абелевого главного фактора группы G. В работе найдена структура конечной ca-$\mathfrak{F}$-группы при предположении, что $\mathfrak{F}$ является насыщенной формацией разрешимых групп. Изучены свойства произведений взаимно перестановочных ca-$\mathfrak{F}$-групп.

Ключевые слова: *конечная группа, ca-$\mathfrak{F}$-группа, композиционная формация, взаимно перестановочное произведение подгрупп*.

Let $\mathfrak{F}$ be a class of groups. A finite group G is called a ca-$\mathfrak{F}$-group if its every non-abelian chief factor is simple and $H/K \rtimes C_G(H/K) \in \mathfrak{F}$ for every abelian chief factor H/K of G. In this paper the structure of finite ca-$\mathfrak{F}$-groups under the assumption that $\mathfrak{F}$ is a soluble saturated formation is found. Properties of mutually permutable products of finite ca-$\mathfrak{F}$-groups are studied.

Keywords: *finite group, ca-$\mathfrak{F}$-group, composition formation, mutually permutable products of subgroups*.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Понятие композиционной формации было впервые введено Л.А. Шеметковым в [1] и Р. Бэром в неопубликованной рукописи (отмечено в [2, IV, С. 370]). Всякая насыщенная формация является композиционной. Класс всех квазинильпотентных групп является примером ненасыщенной композиционной формации. Го Вэньбинем и А.Н. Скибой в [3], [4] было предложено интересное обобщение квазинильпотентности – конструкция квази-$\mathfrak{F}$-групп. В [3] они доказали, что класс всех квази-$\mathfrak{F}$-групп является композиционной формацией, если $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы. В [3], [4] были также рассмотрены некоторые приложения формации квази-$\mathfrak{F}$-групп.

В.А. Ведерников в [5] ввел понятие c-сверхразрешимой группы. Напомним, что группа G называется c-сверхразрешимой, если она обладает главным рядом, все факторы которого изоморфны простым группам. В [6] А.Ф. Васильевым и Т.И. Васильевой было доказано, что класс $\mathfrak{U}_c$ всех c-сверхразрешимых групп является композиционной, но ненасыщенной формацией. В [7] Д. Робинсон установил структурные свойства c-сверхразрешимых групп (в терминологии [7] *SC*-групп).

В [8] было введено следующее обобщение c-сверхразрешимости.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Напомним [9], что главный фактор H/K группы G называется $\mathfrak{F}$-*центральным*, если $H/K \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{F}$.

***Определение* 0.1** [8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Будем говорить, что группа G является ca-$\mathfrak{F}$-группой, если ее каждый неабелевый главный фактор является простой группой, а каждый абелевый главный фактор H/K $\mathfrak{F}$-централен.*

Класс всех ca-$\mathfrak{F}$-групп обозначается через $\mathfrak{F}_{ca}$. В случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$, получим формацию $\mathfrak{U}_c$ всех c-сверхразрешимых групп. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, получим формацию $\mathfrak{N}\mathfrak{A}_{ca}$, состоящую из всех групп G, у которых неабелевые главные факторы изоморфны простым группам, а для каждого абелевого главного фактора H/K группы G группа автоморфизмов $Aut_G(H/K)$ абелева. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$, то класс $\mathfrak{F}_{ca}$ совпадает с классом всех SNAC-групп [7], т. е. классом всех групп, у которых неабелевые главные факторы – простые группы.

Класс всех ca-$\mathfrak{F}$-групп образует композиционную формацию [8]. Также в [8] были установлены свойства произведений нормальных ca-$\mathfrak{F}$-подгрупп.

Напомним [9, §8], что через $Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G)$ обозначается $\mathfrak{F}$-гиперцентр группы G – произведение всех нормальных подгрупп H из G, нормальные G-допустимые факторы которых $\mathfrak{F}$-центральны в G.

Следующая теорема является расширением результата Робинсона [7] для случая, когда $\mathfrak{F}$ – разрешимая насыщенная формация.

***Теорема* A.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая насыщенная формация. Группа G является ca-$\mathfrak{F}$-группой тогда и только тогда, когда G удовлетворяет следующим утверждениям*:

1) $G^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{S}}$;

2) *если $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$, то $G^{\mathfrak{F}} / Z(G^{\mathfrak{F}})$ является прямым произведением G-инвариантных неабелевых простых групп;*

3) $Z(G^{\mathfrak{F}}) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G)$.

Следуя работе [10], группу $G = HK$ будем называть произведением взаимно перестановочных подгрупп H и K, если H перестановочна с любой подгруппой из K, а K перестановочна с любой подгруппой из H. Взаимно перестановочные произведения сверхразрешимых и c-сверхразрешимых подгрупп изучались во многих работах различных авторов (см. монографию [11]). Ряд работ был посвящен рассмотрению случая, когда группа $G = HK$ является произведением взаимно перестановочных подгрупп H и K, которые принадлежат насыщенной формации $\mathfrak{F}$. Поэтому естественной является следующая проблема.

Проблема. Пусть $\mathfrak{F}$ – композиционная формация. Какова структура группы $G = HK$, где H и K – взаимно перестановочные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G.

В данной работе эта проблема решается для формации ca-$\mathfrak{F}$-групп, где $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, содержащая класс $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп.

***Теорема* B.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Пусть группа $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K. Если G – ca-$\mathfrak{F}$-группа, то H и K также ca-$\mathfrak{F}$-группы.*

***Следствие* B.1** [12]. *Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K. Если G – c-сверхразрешимая группа, то H и K также c-сверхразрешимы.*

***Следствие* B.2** [13]. *Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K. Если G – SNAC-группа, то H и K также SNAC-группы.*

***Следствие* B.3.** *Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K. Если G – ca-$\mathfrak{NA}$-группа, то H и K также ca-$\mathfrak{NA}$-группы.*

Известно, что в общем случае группа, представимая в виде произведения своих нормальных сверхразрешимых подгрупп, не является сверхразрешимой. В 1957 году Бэр [14] установил, что такая группа будет сверхразрешимой, если ее коммутант нильпотентен. Следующая теорема является развитием данного результата.

***Теорема* C.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Если группа $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных ca-$\mathfrak{F}$-подгрупп H и K и коммутант G' группы G квазинильпотентен, то G – ca-$\mathfrak{F}$-группа.*

***Следствие* C.1** [12]. *Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных c-сверхразрешимых подгрупп H и K. Если коммутант G' группы G квазинильпотентен, то G – c-сверхразрешимая группа.*

***Следствие* C.2** [15]. *Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных сверхразрешимых подгрупп H и K. Если коммутант G' группы G нильпотентен, то G сверхразрешима.*

***Следствие* C.3.** *Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K. Если H и K – ca-$\mathfrak{NA}$-группы и коммутант G' группы G квазинильпотентен, то G – ca-$\mathfrak{NA}$-группа.*

Следующее следствие расширяет результат о свойствах нормальных произведений ca-$\mathfrak{F}$-групп из работы [8].

***Следствие* C.4.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{U}$. Если группа $G = HK$ – произведение нормальных ca-$\mathfrak{F}$-подгрупп H и K и коммутант G' группы G квазинильпотентен, то G – ca-$\mathfrak{F}$-группа.*

Хорошо известно, что группа, являющаяся произведением своих нормальных сверхразрешимой и нильпотентной подгрупп сверхразрешима. В развитие этого случая получен следующий результат.

***Теорема* D.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация дисперсивных по Оре групп, содержащая $\mathfrak{U}$. Пусть группа $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K. Если подгруппа H – ca-$\mathfrak{F}$-подгруппа, а K квазинильпотентна, то G – ca-$\mathfrak{F}$-группа.*

***Следствие* D.1** [12]. *Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K. Если подгруппа H c-сверхразрешима, а K квазинильпотентна, то G – c-сверхразрешимая группа.*

***Следствие* D.2** [15]. *Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K. Если подгруппа H сверхразрешима, а K нильпотентна, то G – сверхразрешимая группа.*

1 Предварительные результаты

Используется стандартная теоретико-групповая терминология из монографий [2], [16]. Напомним понятия и обозначения, существенные в работе. Через $\mathbb{P}$ обозначается множество всех простых чисел; 1 – единичная группа; $H \rtimes K$ – полупрямое произведение групп H и K; $\mathfrak{G}$ – класс всех групп; $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп; $\mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп; $\mathfrak{U}_c$ – класс всех c-сверхразрешимых групп; $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп; $\mathfrak{N}_p$ – класс всех p-групп; $\mathfrak{J}$ – класс всех простых групп; $\mathfrak{A}$ – класс всех абелевых групп; $\mathfrak{A}(p-1)$ – класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$; $\mathcal{K}(G)$ – множество всех композиционных факторов группы G.

Группа G порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}$ (p_i – простое число, $i = 1, 2, ..., n$) называется *дисперсивной по Оре*, если $p_1 > p_2 > ... > p_n$ и G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_i^{\alpha_i}$ для любого $i = 1, 2, ..., n$.

Формацией называется класс, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$; *наследственной* (*нормально наследственной*), если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит все ее (соответственно нормальные) подгруппы.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Через $G_{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-радикал группы G, т. е. наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа группы G.

Отображение $f : \mathbb{P} \to \{\text{формации}\}$ называется *локальным экраном*. Формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной*, если она имеет хотя бы один локальный экран f такой, что

$$\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/C_G(H/K) \in f(p),$$

для любого главного фактора H/K и для любого $p \in \pi(H/K)$). Известно, что формация $\mathfrak{F}$ является локальной тогда и только тогда, когда она насыщена [2, IV, Теорема 4.6].

Отображение $f : \mathfrak{J} \to \{\text{формации}\}$ называется *композиционным экраном*. Формация $\mathfrak{F}$ называется *композиционной* (или Бэр-локальной формацией, если использовать терминологию из [2]), если она имеет хотя бы один композиционный экран f такой, что

$$\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/C_G(H/K) \in f(A)$$

для любого $A \in \mathcal{K}_{H/K}$).

Внутренним локальным экраном формации $\mathfrak{F}$ называется такой локальный экран f, что $f(p) \subseteq LF(f)$ для любого простого числа p. Экран f называется *максимальным внутренним локальным экраном* формации $\mathfrak{F}$, если f является максимальным элементом множества всех внутренних локальных экранов формации $\mathfrak{F}$. Аналогично вводятся понятия внутреннего композиционного и максимального внутреннего композиционного экранов.

Любая локальная (композиционная) формация имеет единственный максимальный внутренний локальный (композиционный) экран [16, гл. 1].

В работе будем использовать следующие известные результаты о свойствах класса $\mathfrak{F}_{ca}$.

***Лемма* 1.1** [8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Тогда класс $\mathfrak{F}_{ca}$ является непустой формацией.*

***Теорема* 1.2** [8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация и f – ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда формация $\mathfrak{F}_{ca}$ является композиционной и имеет максимальный внутренний композиционный экран h такой, что $h(N) = \mathfrak{F}_{ca}$, если N – простая неабелева группа и $h(N) = f(p)$, если N – простая p-группа, где p – простое число.*

***Лемма* 1.3** [6]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация и N – минимальная нормальная подгруппа группы G такая, что $|N| = p^\alpha$ для некоторого простого числа p. Если N содержится в подгруппе H из G и $H/C_H(U/V) \in \mathfrak{F}$ для любого H-главного фактора U/V группы N, то $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$.*

Нам также потребуются следующие результаты о произведениях взаимно перестановочных подгрупп.

***Лемма* 1.4** [11]. *Пусть подгруппы H и K группы G взаимно перестановочны, подгруппа N нормальна в G. Тогда HN/N и KN/N взаимно перестановочны.*

***Лемма* 1.5** [11]. *Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если N – максимальная нормальная подгруппа группы G, то*
$$\{HN, KN, (H \cap K)N\} \subseteq \{N, G\};$$

2) *если N – неабелева минимальная нормальная подгруппа группы G, то*
$$\{H \cap N, K \cap N\} \subseteq \{N, 1\} \text{ и } N = (N \cap H)(N \cap K);$$

3) *если N – минимальная нормальная подгруппа группы G, то либо $N \le H \cap K$, либо $[N, H \cap K] = 1$;*

4) *если N – минимальная нормальная подгруппа группы G, то $\{H \cap N, K \cap N\} \subseteq \{N, 1\}$;*

5) *если N – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H и $K \cap N = 1$,*

то либо $N \le C_G(H)$, *либо* $N \le C_G(K)$. *Кроме того, если* N *– нециклическая, то* $N \le C_G(K)$.

***Теорема* 1.6** [11]. *Пусть* $G \ne 1$ *и* $G = HK$ *– произведение своих взаимно перестановочных подгрупп* H *и* K. *Тогда* $H_G K_G \ne 1$.

2 Доказательство теоремы А

В данном разделе доказывается теорема, описывающая структуру конечной ca-$\mathfrak{F}$-группы.

***Лемма* 2.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– разрешимая формация. Если* G *является* ca-$\mathfrak{F}$-*группой, то справедливы следующие утверждения:*

1) $G^{\mathfrak{S}} \le G^{\mathfrak{F}} \le C_G(G_{\mathfrak{S}})$;

2) $(G^{\mathfrak{S}})_{\mathfrak{S}} \le Z(G^{\mathfrak{S}})$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Заметим, что все главные факторы группы G, лежащие в подгруппе $G_{\mathfrak{S}}$, являются $\mathfrak{F}$-центральными в G. Следовательно, подгруппа $G_{\mathfrak{S}}$ является $\mathfrak{F}$-гиперцентральной и, таким образом, является подгруппой $\mathfrak{F}$-гиперцентра $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$. В силу следствия 9.3.2 [16] имеем, что

$$G^{\mathfrak{F}} \le C_G(Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)).$$

Отсюда и из того, что $\mathfrak{F}$ – разрешимая формация, заключаем, что $G^{\mathfrak{S}} \le G^{\mathfrak{F}} \le C_G(G_{\mathfrak{S}})$.

Докажем утверждения 2). Пусть $R = (G^{\mathfrak{S}})_{\mathfrak{S}}$. Из R char $G^{\mathfrak{S}} \trianglelefteq G$ следует, что $R \trianglelefteq G$. Поэтому $R \le G_{\mathfrak{S}}$. Ввиду утверждения 1) леммы $G^{\mathfrak{S}} \le C_G(R)$. Откуда следует справедливость утверждения 2). Лемма доказана.

Доказательство теоремы А. Обозначим через D разрешимый корадикал $G^{\mathfrak{S}}$ группы G. Пусть G – ca-$\mathfrak{F}$-группа. Если группа G разрешима, то $D = 1$ и $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому утверждения 1), 2) и 3) выполняются. Будем считать, что группа G не является разрешимой. Тогда $D \ne 1$.

Так как $\mathfrak{F}$ – разрешимая формация, то $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$. Следовательно, $D \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Так как $\mathfrak{F}_{ca}$ является формацией, то $G/D \in \mathfrak{F}_{ca}$. В силу разрешимости факторгруппы G/D получаем, что $G/D \in \mathfrak{F}$. Значит, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq D$ и $D = G^{\mathfrak{F}}$. Утверждение 1) выполняется. Заметим, что все главные факторы группы G, лежащие ниже центра $Z(D)$, являются абелевыми, а значит и $\mathfrak{F}$-центральными. Следовательно, центр $Z(D)$ является $\mathfrak{F}$-гиперцентральным и утверждение 3) выполняется.

Покажем, что $D/Z(D)$ является прямым произведением G-инвариантных простых групп.

Предположим, что $Z(D) = 1$. Пусть N_1 – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в подгруппе D. Если N_1 абелева, то из $N_1 \le D_{\mathfrak{S}}$ по утверждению 2) леммы 2.1 получаем, что $N_1 \le Z(D) = 1$. Значит, N_1 неабелева. Так как $G \in \mathfrak{F}_{ca}$, то N_1 является простой группой. Заметим, что $G/C_G(N_1)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(N_1)$, а $N_1C_G(N_1)/C_G(N_1)$ изоморфна группе внутренних автоморфизмов $\mathrm{Inn}(N_1)$. Следовательно, фактор-группа

$$G/N_1C_G(N_1) \simeq (G/C_G(N_1))/(N_1C_G(N_1)/C_G(N_1)$$

изоморфна подгруппе из $\mathrm{Aut}(N_1)/\mathrm{Inn}(N_1)$. Исходя из справедливости гипотезы Шрайера, заключаем, что $G/N_1C_G(N_1)$ разрешима. Тогда $D \le N_1C_G(N_1)$, следовательно,

$$D = N_1C_G(N_1) = N_1C_D(N_1),$$

причем, $N_1 \cap C_D(N_1) = 1$. Если $D = N_1$, то утверждение 2) выполняется. Предположим, что D не является простой. Поэтому, $C_D(N_1) \ne 1$. В случае, когда $C_D(N_1)$ – простая группа, утверждение 2) выполняется. Предположим, что $C_D(N_1)$ не является простой, пусть N_2 – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в подгруппе $C_D(N_1)$. Так как $Z(D) = 1$, ввиду утверждения 2) леммы 2.1 N_2 – простая неабелева подгруппа. По доказанному выше $D = N_2C_D(N_2)$. По тождеству Дедекинда

$$C_D(N_1) = C_D(N_1) \cap N_2C_D(N_2) =$$
$$= N_2(C_D(N_1) \cap C_D(N_2)) = N_2C_L(N_2),$$

где $L = C_D(N_1) \cap C_D(N_2)$. Тогда $D = N_1N_2C_L(N_2)$. Применяя доказанное выше к $C_D(N_2)$ и т. д., можем заключить, что $D = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_t$ является прямым произведением простых минимальных нормальных подгрупп группы G. Таким образом, верно и утверждение 2).

Пусть теперь $Z(D) \ne 1$. Так как $G/Z(D) \in \mathfrak{F}_{ca}$ и $(G/Z(D))^{\mathfrak{S}} = D/Z(D)$, для $G/Z(D)$ утверждения 1) и 3) выполняются. Обозначим $T/Z(D) = Z(D/Z(D))$. Тогда T – нормальная разрешимая подгруппа группы D. По лемме 2.1 T содержится в центре $Z(D)$. Поэтому

$$Z(D/Z(D)) = 1.$$

По доказанному выше для $G/Z(D)$ утверждение 2) выполняется.

Обратно, предположим, что для группы G справедливы утверждения 1), 2) и 3). Проведем главный ряд группы G через подгруппу $D = G^{\mathfrak{F}}$. Заметим, что все главные факторы, лежащие выше D, являются абелевыми и $\mathfrak{F}$-центральными. По утверждению 2) фактор-группа $D/Z(D)$

является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп группы $G/Z(D)$, которые будут простыми. Ниже $Z(D)$ все главные факторы группы G будут $\mathfrak{F}$-центральными по утверждению 3). В силу теоремы Жордана – Гёльдера для групп с операторами [2, A, 3.2] и определения 0.1 группа $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Теорема доказана.

3 Доказательства теорем B, C и D

В данном разделе рассмотрим доказательства сформулированных выше свойств произведений взаимно перестановочных ca-$\mathfrak{F}$-групп.

Доказательство теоремы B. Предположим, что теорема неверна и выберем группу G – контрпример наименьшего порядка. Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G. Если $N = G$, то G – простая группа, следовательно, $H \in \mathfrak{F}_{ca}$ и $K \in \mathfrak{F}_{ca}$. Пусть $N \neq G$. Тогда по лемме 1.4 $G/N = HN/N \cdot KN/N$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп HN/N и KN/N группы G/N. Заметим, что $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$. Таким образом, для G/N условия теоремы выполняются. Следовательно,

$$HN/N \simeq H/(H \cap N) \in \mathfrak{F}_{ca}$$

и $KN/N \simeq K/(K \cap N) \in \mathfrak{F}_{ca}$. Из леммы 1.1 следует, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

Пусть N – неабелева группа. Тогда N – простая группа. Согласно лемме 1.5 достаточно рассмотреть следующие случаи.

1. Пусть $H \cap N = K \cap N = N$. Тогда

$$N \leq H \cap K \text{ и } H/(H \cap N) = H/N \in \mathfrak{F}_{ca}$$

и $K/(K \cap N) = K/N \in \mathfrak{F}_{ca}$. Следовательно, H и K – ca-$\mathfrak{F}$-группы. Получили противоречие.

2. Пусть $H \cap N = K \cap N = 1$. Тогда

$$H/(H \cap N) \simeq H \text{ и } K/(K \cap N) \simeq K$$

– ca-$\mathfrak{F}$-группы. Противоречие.

3. Пусть $H \cap N = N$ и $K \cap N = 1$. Тогда $H/(H \cap N) = H/N \in \mathfrak{F}_{ca}$ и H – ca-$\mathfrak{F}$-группа и $K/(K \cap N) \simeq K$ – ca-$\mathfrak{F}$-группа, противоречие.

4. Пусть $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$. Данный случай рассматривается аналогично случаю 3.

Случай когда N – абелева p-группа рассматривается аналогично с некоторыми изменениями. Теорема доказана.

***Лемма* 3.1.** *Пусть группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N = N_1 \times \ldots \times N_t$, где N_i – изоморфные простые неабелевые группы для всех $i = 1,\ldots,t$. Если $N \leq H$, где H – ca-$\mathfrak{F}$-подгруппа группы G, то $N_i \lhd H$ для всех $i = 1,\ldots,t$.*

Доказательство. Пусть $i \in \{1,\ldots,t\}$. Рассмотрим нормальное замыкание $N_i^H = \left\langle N_i^{\,x} \mid x \in H \right\rangle$ подгруппы N_i в H. Заметим, что $N_i \lhd\lhd G$. Следовательно, $N_i \lhd\lhd H$. Согласно лемме 9.17 [17] N_i^H является минимальной нормальной подгруппой группы H. Так как подгруппа N_i^H неабелева и изоморфна главному фактору ca-$\mathfrak{F}$-группы H, то N_i^H – простая группа. Тогда в силу $N_i \lhd\lhd N_i^H$ имеем, что $N_i^H = N_i$. Следовательно, $N_i \unlhd H$ для любого $i = 1,\ldots,t$. Лемма доказана.

***Лемма* 3.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – композиционная формация и f – ее внутренний композиционный экран. Пусть N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, причем N – абелева p-группа для некоторого простого числа p. Главный фактор N является $\mathfrak{F}$-центральным в группе G тогда и только тогда, когда*

$$G/C_G(N) \in f(p).$$

Доказательство. Пусть $G/C_G(N) \in f(p)$. Рассмотрим полупрямое произведение

$$R = N \rtimes G/C_G(N).$$

Заметим, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы R и $C_R(N) = N$. Тогда $R/C_R(N) \simeq G/C_G(N) \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $R \in \mathfrak{F}$, т. е. главный фактор N группы G является $\mathfrak{F}$-центральным.

Пусть теперь N – $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор группы G. Тогда $R = N \rtimes G/C_G(N) \in \mathfrak{F}$, где N – единственная минимальная нормальная подгруппа в R и $C_G(N) = N$. Отсюда следует, что $R/C_R(N) \simeq G/C_G(N) \in f(p)$. Лемма доказана.

***Лемма* 3.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация и группа $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K, где $H, K \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$ и $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$. Тогда $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна и выберем группу G – контрпример минимального порядка. Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G. Без ограничения общности можем считать $G \neq N$. По лемме 1.4 $G/N = HN/N \cdot KN/N$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп HN/N и KN/N группы G/N. Заметим, что $HN/N \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$, $KN/N \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$. Тогда все условия леммы выполняются для G/N. Поэтому $G/N \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$ – формация, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Следовательно, N – q-группа для некоторого простого числа $q \neq p$. Так как $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$ и $O_p(G) = 1$, то $G \in \mathfrak{A}$. Отсюда получаем, что $H \in \mathfrak{F}$ и $K \in \mathfrak{F}$. В силу того, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G имеем, что G – циклическая группа и $|G|=q^n$. Так как $G=HK$, то $G=H$ или $G=K$, т. е. $G\in\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы С. Предположим, что теорема неверна и выберем группу G – контрпример наименьшего порядка. Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G. Если $N=G$, то G – простая группа, следовательно, $G\in\mathfrak{F}_{ca}$. Пусть $N\neq G$. Тогда по лемме 1.4 $G/N=HN/N\cdot KN/N$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп HN/N и KN/N группы G/N. Заметим, что коммутант $(G/N)'$ квазинильпотентен. Таким образом, для G/N условия теоремы выполняются. Следовательно, $G/N\in\mathfrak{F}_{ca}$. Так как $\mathfrak{F}_{ca}$ является формацией по лемме 1.1, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

Пусть N – неабелева группа. Тогда

$$N=N_1\times\ldots\times N_t,$$

где N_i – изоморфные простые неабелевы группы, $i=1,\ldots,t$. Согласно лемме 1.5 достаточно рассмотреть следующие случаи.

1. Пусть $H\cap N=K\cap N=N$. Тогда

$$N\subseteq H\cap K.$$

Так как H и K – ca-$\mathfrak{F}$-подгруппы, и

$$N=N_1\times\cdots\times N_t,$$

то по лемме 3.1 $N_i\lhd H$ и $N_i\lhd K$. Отсюда и из $G=HK$, следует, что $N_i\lhd G$ для всех $i=1,\ldots,t$. В силу того, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, получаем, что $t=1$ и N – простая группа. Из $G/N\in\mathfrak{F}_{ca}$ следует, что $G\in\mathfrak{F}_{ca}$. Получили противоречие.

2. Пусть $H\cap N=K\cap N=1$. Тогда по пункту 2) леммы 1.5 получаем, что

$$N=(H\cap N)(K\cap N)=1,$$

что противоречит выбору N.

3. Пусть $H\cap N=N$ и $K\cap N=1$. Тогда $N\subseteq H$ и по пункту 5) леммы 1.5 $N\leq C_G(H)$ или $N\leq C_G(K)$. Так как $N\leq H$ и N неабелева, получаем, что $N\leq C_G(K)$. Так как $N=N_1\times\ldots\times N_t$, подгруппа $N_i\leq C_G(K)$ для каждого $i=1,\ldots,t$. Из $N_i\leq H$ по лемме 3.1 получаем, что $N_i\lhd H$ для каждого $i=1,\ldots,t$. В силу $G=HK$, имеем, что $N_i\lhd G$. Так как N – минимальная нормальная подгруппа группы G, заключаем, что $N=N_i$ и N – простая группа. В силу $G/N\in\mathfrak{F}_{ca}$ имеем, что $G\in\mathfrak{F}_{ca}$. Получили противоречие с выбором G.

4. Пусть $H\cap N=1$ и $K\cap N=N$. Данный случай рассматривается аналогично случаю 3.

Пусть теперь N – абелева группа. Тогда N – p-группа для некоторого просто числа p. По теореме 1.2 формация $\mathfrak{F}_{ca}$ имеет максимальный внутренний композиционный экран h такой, что $h(N)=f(p)$, где f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Согласно лемме 1.5 достаточно рассмотреть следующие случаи.

1. Пусть $H\cap N=K\cap N=N$. Тогда

$$N\subseteq H\cap K.$$

Пусть U/V – любой H-главный фактор группы N. Так как $H\in\mathfrak{F}_{ca}$, то $H/C_H(U/V)\in h(p)$. Из леммы 1.3 получаем, что $H/C_H(N)\in\mathfrak{N}_p h(p)=h(p)$. Аналогично $K/C_K(N)\in h(p)$. Рассмотрим группу

$$G/C_G(N)=HC_G(N)/C_G(N)\cdot KC_G(N)/C_G(N)$$

– произведение взаимно перестановочных подгрупп $HC_G(N)/C_G(N)$ и $KC_G(N)/C_G(N)$ группы $G/C_G(N)$.

Так как $N\subseteq G'$ и G' – квазинильпотентная группа, то $G'/C_{G'}(N)\in\mathfrak{N}_p$ по лемме 1.3. Значит

$$(G/C_G(N))'=G'C_G(N)/C_G(N)\simeq G'/C_{G'}(N)$$

– p-группа. Тогда из того, что

$$G/C_G(N)/(G/C_G(N))'\in\mathfrak{A}$$

следует, что $G/C_G(N)\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$. Используя лемму 3.3 для $G/C_G(N)$, получаем, что

$$G/C_G(N)\in\mathfrak{N}_p h(p)\subseteq\mathfrak{F}_{ca}.$$

Отсюда получаем, что $G\in\mathfrak{F}_{ca}$. Это противоречит выбору G.

2. Пусть $H\cap N=K\cap N=1$. По теореме 1.6, $H_G K_G\neq 1$. Тогда

$$N\subseteq H_G\subseteq H \text{ или } N\subseteq K_G\subseteq K,$$

противоречие.

3. Пусть $H\cap N=N$ и $K\cap N=1$. Пусть N – нециклическая подгруппа, тогда по пункту 5) леммы 1.5 $N\leq C_G(K)$. Следовательно, $K\subseteq C_G(N)$ и

$$G/C_G(N)=HC_G(N)/C_G(N)\cdot KC_G(N)/C_G(N)=$$
$$=HC_G(N)/C_G(N)\simeq H/(C_G(N)\cap H)=H/C_H(N).$$

Так как $N\subseteq H$ и $H\in\mathfrak{F}_{ca}$, то по лемме 1.3 $H/C_H(N)\in h(p)$. Из леммы 3.2 следует, что фактор N – $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор группы G. Тогда $G\in\mathfrak{F}_{ca}$. Получили противоречие. Если N – циклическая группа, то $|N|=p$ и $G/C_G(N)$ – циклическая группа порядка, делящего $p-1$. Тогда

$$G/C_G(N)\in\mathfrak{A}(p-1)\subseteq f(p)=h(p).$$

В силу $G/N\in\mathfrak{F}_{ca}$ получаем, что $G\in\mathfrak{F}_{ca}$. Получили противоречие.

4. Пусть $H\cap N=1$ и $K\cap N=N$. Данный случай рассматривается аналогично случаю 3. Теорема доказана.

***Лемма* 3.4.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация дисперсивных по Оре групп, содержащая $\mathfrak{U}$ и f – ее максимальный внутренний локальный экран. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K группы G. Если H – p-группа и $K \in f(p)$, то $G \in f(p)$.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна и выберем группу G – контрпример наименьшего порядка. Обозначим через N – минимальную нормальную подгруппу группы G. Без ограничения общности можно положить, что $G \neq N$. По лемме 1.4

$$G / N = HN / N \cdot KN / N$$

– произведение взаимно перестановочных подгрупп HN / N и KN / N группы G / N. Заметим, что $HN / N \simeq H / H \cap N$ – p-группа и

$$KN / N \simeq K / K \cap N \in f(p).$$

Тогда условия леммы выполняются для G / N. Следовательно, $G / N \in f(p)$. Так как $f(p)$ является формацией, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Значит, N – q-группа для некоторого простого $q \neq p$.

Согласно лемме 1.5 достаточно рассмотреть следующие случаи.

1. Пусть $H \cap N = K \cap N = N$. Тогда $N \subseteq H \cap K$. Значит, N – p-группа, противоречие.

2. Пусть $H \cap N = K \cap N = 1$. Рассмотрим G_q – силовскую q-подгруппу группы G. Тогда $N \subseteq G_q$. Так как H – p-группа, можем положить, что $G_q \subseteq K$. Следовательно, $N \subseteq K$, противоречие.

3. Пусть $H \cap N = N$ и $K \cap N = 1$. Тогда N – p-группа, противоречие.

4. Пусть $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$. Положим $\Phi(G) = 1$. Тогда $N = C_G(N)$.

Если N – циклическая группа, то $|N| = q$. Тогда $G = N \rtimes M$, где $M \in f(p)$. Следовательно M – абелева группа порядка делящего $q - 1$. Но с другой стороны $G = HK$, где H – p-группа. Так как $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация дисперсивных по Оре групп, согласно [2, IV, 4.8 (g)] $p > q$, получили противоречие.

Пусть N – нециклическая группа. По пункту 5) леммы 1.5 $N \leq C_G(H)$. Тогда $H \leq C_G(N) = N$, противоречие.

Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Тогда $N \subseteq \Phi(G)$. Рассмотрим $O_p(G / N) = G_p N / N$, где G_p – силовская p-подгруппа группы G. Тогда $G_p N \lhd G$. По лемме Фраттини $G = N_G(G_p)N = N_G(G_p)$ и $G_p \lhd G$, противоречие. Значит, $O_p(G / N) = 1$ и $G_p = 1$, так как N – q-группа. Тогда $H = 1$ и $G = K \in f(p)$. Последнее противоречие завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы D. Предположим, что теорема неверна и выберем группу G, являющуюся контрпримером наименьшего порядка. Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G. Без ограничения общности можно положить, что $G \neq N$. По лемме 1.4 $G / N = HN / N \cdot KN / N$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп HN / N и KN / N группы G / N. Заметим, что

$$HN / N \simeq H / H \cap N \in \mathfrak{F}_{ca}$$

и $KN / N \simeq K / K \cap N \in \mathfrak{N}$. Таким образом, для G / N условия теоремы выполняются.

Следовательно, $G / N \in \mathfrak{F}_{ca}$. Так как $\mathfrak{F}_{ca}$ является формацией по лемме 1.1, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

Пусть N – абелева p-группа для некоторого простого p. По теореме 1.2 формация $\mathfrak{F}_{ca}$ имеет максимальный внутренний композиционный экран h такой, что $h(N) = f(p)$, где f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Согласно лемме 1.5 достаточно рассмотреть следующие случаи.

1. Пусть $H \cap N = K \cap N = N$. Тогда

$$N \subseteq H \cap K.$$

Пусть U / V – любой H-главный фактор группы N. Так как $H \in \mathfrak{F}_{ca}$, то $H / C_H(U / V) \in h(p)$. Из леммы 1.3 получаем, что $H / C_H(N) \in \mathfrak{N}_p h(p)$. Так как K квазинильпотентна, то $K / C_K(N) \in \mathfrak{N}_p$ по лемме 1.3. Рассмотрим группу

$$G / C_G(N) = HC_G(N) / C_G(N) \cdot KC_G(N) / C_G(N)$$

– произведение взаимно перестановочных подгрупп $HC_G(N) / C_G(N)$ и $KC_G(N) / C_G(N)$ группы $G / C_G(N)$. Применяя лемму 3.4 к группе $G / C_G(N)$ получаем, что

$$G / C_G(N) \in \mathfrak{N}_p f(p) = h(p).$$

Так как G / N – $\mathfrak{F}_{ca}$-группа, то G – $\mathfrak{F}_{ca}$-группа, противоречие.

2. Пусть $H \cap N = K \cap N = 1$. По теореме 1.6, $H_G K_G \neq 1$. Тогда $N \subseteq H_G \subseteq H$ или

$$N \subseteq K_G \subseteq K,$$

противоречие.

3. Пусть $H \cap N = N$ и $K \cap N = 1$. Положим, что N – нециклическая группа. Тогда $N \leq C_G(K)$ по пункту 5) леммы 1.5. Заметим, что $K \subseteq C_G(N)$. Поэтому

$$G / C_G(N) = HC_G(N) / C_G(N) \cdot KC_G(N) / C_G(N) =$$
$$= HC_G(N) / C_G(N) \simeq H / (C_G(N) \cap H) = H / C_H(N).$$

Так как $N \subseteq H$ и $H \in \mathfrak{F}_{ca}$, следовательно $H / C_H(N) \in h(p)$ по лемме 1.3. Значит, $G \in \mathfrak{F}_{ca}$, противоречие.

Пусть N – циклическая группа. Тогда N – группа простого порядка и $G / C_G(N)$ – циклическая группа порядка делящего $p - 1$. Следовательно

$$G / C_G(N) \in \mathfrak{A}(p-1) \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) = h(p).$$

Поэтому $G \in \mathfrak{F}_{ca}$, противоречие.

4. Пусть $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$. Пусть N – нециклическая группа. Тогда $N \le C_G(H)$ по пункту 5) леммы 1.5. Поэтому $H \subseteq C_G(N)$ и

$$G / C_G(N) = HC_G(N) / C_G(N) \cdot KC_G(N) / C_G(N) =$$
$$= KC_G(N) / C_G(N) \simeq K / (C_G(N) \cap K) = K / C_K(N).$$

Так как $N \subseteq K$ и $K \in \mathfrak{N}_p$, получаем, что

$$H / C_H(N) \in \mathfrak{N}_p \subseteq h(p)$$

по лемме 1.3. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_{ca}$, противоречие.

Пусть N – циклическая группа. Тогда N – группа простого порядка и $G / C_G(N)$ – циклическая группа порядка делящего $p-1$. Следовательно

$$G / C_G(N) \in \mathfrak{A}(p-1) \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) = h(p).$$

Поэтому $G \in \mathfrak{F}_{ca}$, противоречие.

Пусть N – неабелева подгруппа. По пункту 2) леммы 1.5 получаем, что

$\{H \cap N, K \cap N\} \subseteq \{N, 1\}$ и $N = (N \cap H)(N \cap K)$.

Следовательно, случай $H \cap N = K \cap N = 1$ невозможен. Заметим, что $N = N_1 \times \ldots \times N_t$ – произведение простых неабелевых подгрупп N_i.

Пусть $H \cap N = N$. Так как H – $\mathfrak{F}_{ca}$-подгруппа, то $N_i \lhd H$ по лемме 3.1. Если $K \cap N = N$ тогда $K_i \lhd H$ по лемме 3.1. Так как $G = HK$, то $N_i \lhd G$ для всех $i = 1, \ldots, t$. Противоречие. Если $K \cap N = 1$ то в силу того, что N неабелева и $N \le H$ получаем, что $N \le C_G(K)$ по пункту 5) леммы 1.5. Значит, $K \le C_G(N_i)$ и $N_i \lhd G$ для всех $i = 1, \ldots, t$. Так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $N = N_i$ – простая группа. Так как $G / N \in \mathfrak{F}_{ca}$, то $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Получили противоречие с выбором группы G.

Если $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$, то как выше показываем, что $N = N_i$ – простая группа и $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Последнее противоречие завершает доказательство теоремы.

4 Заключительные замечания

С помощью конструкции класса $\mathfrak{F}_{ca}$ можно строить различные новые конкретные примеры композиционных формаций, подходящие под условия приведенных выше теорем.

Приведем одну серию таких примеров.

Согласно [2], *ранговой функцией* называется отображение $R : p \to R(p)$, которое каждому простому числу p ставит в соответствие некоторое множество натуральных чисел $R(p)$. Для этой функции в [2] определяется класс групп

$$\mathfrak{F}(R) = (G \in \mathfrak{S} \mid \text{ для всех простых } p \in \pi(G)$$
$$\text{каждый главный } p\text{-фактор из } G$$
$$\text{имеет ранг, принадлежащий } R(p)),$$

который является формацией.

В случае, когда $\mathfrak{F}(R)$ является насыщенной формацией, ранговая функция называется насыщенной [2, С. 484]. Говорят, что ранговая функция R имеет полную характеристику, если $R(p) \ne \varnothing$ для всех простых p.

Заметим, что если R – насыщенная ранговая функция полной характеристики, то по [2, IV, 4.3] получаем, что $1 \in R(p)$ для всех простых $p \in \mathbb{P}$ и поэтому $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}(R)$.

Если задана ранговая функция R, то согласно [2] для каждого простого числа p определяются

$$\pi(G) = R(p) \cap \mathbb{P} \text{ и}$$
$$e(p) = \{p^m - 1 \mid m \in R(p)\}.$$

Через $\mathfrak{A}_{\pi(p)'}(e(p))$ обозначается класс всех абелевых $\pi(p)'$-групп с экспонентой, делящей $e(p)$, который является формацией.

Согласно [2] выполняется следующая

***Лемма* 4.1** [2]. *Пусть R – насыщенная ранговая функция полной характеристики. Тогда R удовлетворяет следующим условиям*

RF1: *Если $n \in R(p)$ и $m \mid n$, то $m \in R(p)$;*

RF2: *Если $\{m, n\} \in R(p)$, то $mn \in R(p)$;*

RF3: *Если p и q различные простые числа, $q \in R(p)$ и $m \in R(p)$, то $q^m - 1 \in R(p)$;*

RF4*: Если простые числа p и q и натуральное число r удовлетворяют условиям*

1) *$p \mid (q^m - 1)$ для некоторого $m \in R(p)$,*

2) *$q \mid (p^n - 1)$ для некоторого $n \in R(p)$,*

3) *$r \mid (p^k - 1)$ для некоторого $k \in R(p)$,*

4) *$p \in R(p)$, $r \in R(p)$,*

тогда $r \in R(p)$.

Локальный экран формации $\mathfrak{F}(R)$ в случае, когда R – насыщенная ранговая функция, описан в теореме 1.18 [2, С. 490], которую сформулируем в виде леммы.

***Лемма* 4.2.** *Пусть R – ранговая функция, и $\hat{\mathfrak{F}}(R)$ – локальная формация, определенная локальным экраном f таким, что*

$$f(p) = \mathfrak{A}_{\pi(p)'}(e(p))\mathfrak{S}_\pi(p)$$

для каждого простого p. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) *R является насыщенной ранговой функцией*;

2) *R удовлетворяет условиям* **RF1-RF4**;

3) $\hat{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}$.

***Следствие* B.4.** *Пусть R – насыщенная ранговая функция полной характеристики и группа $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K группы G. Если G – ca-$\mathfrak{F}(R)$-группа, то H и K также ca-$\mathfrak{F}(R)$-группы.*

***Следствие* C.5.** *Пусть R – насыщенная ранговая функция полной характеристики и группа $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных ca-$\mathfrak{F}(R)$-подгрупп H и K группы G. Если коммутант G' группы G квазинильпотентен, то G – ca-$\mathfrak{F}(R)$-группа.*

Напомним [18]–[19], что подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset ... \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1,\ldots,n.$ В работах [18]–[20] были приведены новые примеры насыщенных формаций дисперсивных по Оре групп, содержащие $\mathfrak{U}$: класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ всех групп, у которых любая силовская подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна; класс $\mathfrak{X}$ всех групп, у которых любая циклическая примарная подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна.

Приведем новые следствия теоремы D.

***Следствие* D.3.** *Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K. Если H – ca-$\mathrm{w}\mathfrak{U}$-подгруппа, а K квазинильпотентна, то G – ca-$\mathrm{w}\mathfrak{U}$-группа.*

***Следствие* D.4.** *Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K. Если H – ca-$\mathfrak{X}$-подгруппа, а K квазинильпотентна, то G – ca-$\mathfrak{X}$-группа.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* Два направления в развитии непростых конечных групп (доклад, прочитанный на XII Всесоюзном алгебраическом коллоквиуме в Свердловске в сентябре 1973 г.) / Л.А. Шеметков // Успехи мат. наук. – 1975. – Т. 30, № 2. – С. 179–198.
2. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
3. *Guo*, *W.* On finite quasi-$\mathfrak{F}$-groups / W. Guo, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 470–481.
4. *Guo*, *W.* On some classes of finite quasi-$\mathfrak{F}$-groups / W. Guo, A.N. Skiba // Journal of Group Theory. – 2009. – Vol. 12. – P. 407–417.
5. *Ведерников*, *В.А.* О некоторых классах конечных групп / В.А. Ведерников // Докл. АН БССР. – 1988. – Т. 32, № 10. – С. 872–875.
6. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Изв. вузов. Серия Математика. – 1997. – Т. 426, № 11. – С. 10–14.
7. *Robinson*, *D.J.S.* The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation / D.J.S. Robinson // J. Austral. Math. Soc. – 2001. – Vol. 70. – P. 143–149.
8. *Мысловец*, *Е.Н.* О конечных ca-$\mathfrak{F}$-группах / Е.Н. Мысловец // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – Т. 2, № 19. – С. 64–68.
9. *Шеметков*, *Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 256 с.
10. *Carocca*, *A.* *p*-supersolvability of factorized finite groups / A. Carocca // Hokkaido Math. J. – 1992. – № 21. – P. 395–403.
11. *Ballester-Bolinches*, *A.* Products of Finite Groups / A. Ballester – Bolinches, R. Esteban – Romero, M. Asaad. – Berlin: Walter de Gruyter, 2010. – 334 p.
12. *Ballester-Bolinches*, *A.* On mutually permutable products of finite groups / A. Ballester – Bolinches, J. Cossey, M. C. Pedraza – Aguilera // J. Algebra. – 2005. – Vol. 294. – P. 127–135.
13. *Beidleman*, *J.C.* Group classes and mutually permutable products / J.C. Beidleman, H. Heineken // J. Algebra. – 2006. – Vol. 297. – P. 409–416
14. *Baer*, *R.* Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.
15. *Asaad*, *M.* On the supersolvability of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. (Basel). – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.
16. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
17. *Isaacs*, *I.M.* Finite Group Theory / I.M. Isaacs. – Graduate Studies in Mathematics. – 2008. – № 92.
18. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 2 (3). – С. 21–27.
19. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
20. *Monakhov*, *V.S.* Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Ricerche di Matematica. – 2013. – Vol. 62. – P. 307–329.

Поступила в редакцию 18.04.16.